

# MODELANDO VÓRTICES TIPO “PANCAKE” MEDIANTE ARREGLOS DE IMANES

L. del Río, C. Noda y E. Altshuler, Laboratorio de Superconductividad IMRE, Facultad de Física, Universidad de La Habana, Habana, Cuba

## RESUMEN

En este trabajo desarrollamos y estudiamos un modelo macroscópico basado en imanes, para facilitar la comprensión de varias propiedades de los vórtices tipo “pancake”, que aparecen en los superconductores de alta temperatura crítica. Aunque la naturaleza misma de las interacciones entre los imanes del modelo es bien diferente de las que tiene lugar entre los vórtices, nuestros cálculos demuestran que la dependencia de las energías involucradas respecto a ciertos parámetros geométricos es sorprendentemente similar en ambos sistemas, al menos cualitativamente. Finalmente, se presentan resultados experimentales preliminares que reproducen bien las predicciones teóricas, demostrando la potencialidad didáctica del modelo propuesto como herramienta útil para comprender la compleja física de los vórtices tipo pancake.

## ABSTRACT

We develop and study a magnet-based, macroscopic model that makes easier the understanding of some properties of pancake vortices in high temperature superconductors. Although the nature itself of the inter-magnet interactions is quite different from that of the inter-vortex interactions, our calculations show that the energy-dependence on certain geometrical parameters is amazingly similar in both systems, at least qualitatively. Finally, we report preliminary experimental results that reproduce well theoretical predictions, underlining the didactic potential of the proposed model as a useful tool to understand the complex physics of pancake vortices.

## I. INTRODUCCIÓN

La modelación de fenómenos microscópicos a escala macroscópica ha sido, desde siempre, uno de los pilares de la Enseñanza de la Física. Bolitas que saltan dentro de una caja de plástico vibrante intentan hacernos visualizar el por qué de la distribución de Boltzmann en un gas, mientras que balines metálicos sometidos a microondas nos permiten comprender claramente cómo un cristal produce un difractograma de rayos X. Un fenómeno microscópico bien explotado en cuando a modelación macroscópica se refiere, es el de la Superconductividad. Los tópicos a modelar han barrido, desde las junturas de Josephson [1] hasta la dinámica de vórtices [2,3].

Uno de los fenómenos más interesantes que ocurren en los superconductores consiste en la aparición de vórtices si existe un campo magnético externo suficientemente fuerte. Dichos vórtices normalmente tienen forma cilíndrica, presentan un núcleo no-superconductor que se extiende una distancia “ $\xi$ ” llamada *longitud de coherencia* a partir de la cual aparecen corrientes superconductoras, cuya densidad decae dentro de una distancia característica “ $\lambda$ ” llamada *profundidad de penetración* (o *longitud de penetración de London*). En los superconductores de alta temperatura crítica (SAT), específicamente en aquellos que presentan una alta anisotropía (asociada a su estructura “a capas”), estos “cilindros” se dividen formando anillos circulares o corrientes en forma de disco denominados vórtices

tipo “pancake”, los cuales yacen uno en cada capa del material. Estos vórtices bidimensionales situados en diferentes planos superconductores interactúan entre sí a través de dos mecanismos: el efecto Josephson, y la simple interacción magnetostática entre los vórtices [4]. De ahora en adelante, nos referiremos a la región de campos y temperaturas donde sólo este último tipo de interacción es relevante.

En 1996, Benkraouda y Clem [5] realizaron un análisis interesante acerca de cierto fenómeno que ocurre en los vórtices de pancake para materiales de alta anisotropía, donde el acople por interacción de Josephson es muy débil, y el “pinning” debido a los defectos del material es despreciable. En este artículo ellos analizan qué ocurre con una línea de vórtices tipo pancake cuando el campo magnético aplicado se inclina cierto ángulo respecto al eje  $z$  perpendicular a los planos en los que se sitúan los vórtices. Los resultados de este artículo (completamente teórico) nos motivaron a estudiar un análogo macroscópico utilizando imanes, con el propósito de establecer una comparación entre los parámetros de uno y otro sistemas.

En este trabajo mostraremos sucintamente, en una primera parte, los resultados obtenidos por Benkraouda y Clem, en su artículo de 1996. Luego, mostraremos los resultados obtenidos por nosotros para el caso de arreglos de imanes, y posteriormente estableceremos comparaciones cualitativas entre la

física de ambos sistemas, para finalmente evaluar la utilidad didáctica del modelo a base de imanes.

## II. EL CASO DE LOS VÓRTICES DE PANCAKE

La estructura analizada en la referencia [5] consiste en una línea de vórtices pancake, separados por una distancia  $s$  que ha sido inclinada determinado ángulo  $\theta$  a partir del eje  $z$  (ver Figura 1a):

La fuerza con que interactúan diferentes vórtices está dada por [6]:

$$F = -\left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda}\right)^2 \frac{s^2}{\lambda\rho} \left( e^{-s|z_n|/2\lambda^2} - e^{-s r_n/2\lambda^2} \right), \quad (1)$$

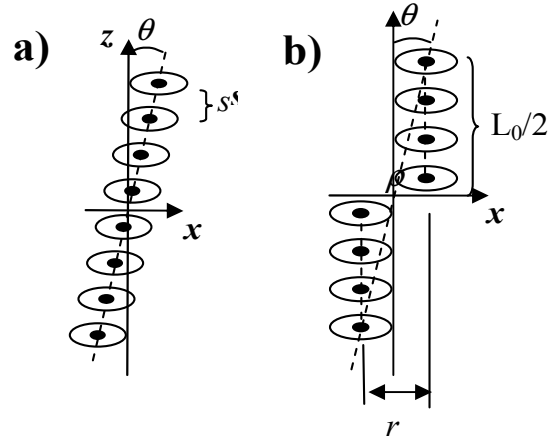
donde  $\phi_0$  es el cuanto de flujo,  $\lambda$  es la profundidad de penetración,  $z_n = ns$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ),  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

y  $r_n = \sqrt{\rho^2 + z_n^2}$  (nótese que todas las fórmulas extraídas de las referencias [5] y [6] han sido llevadas al sistema internacional de unidades). De aquí se observa que si dos vórtices están en el mismo plano se repelen, mientras que si se encuentran en diferentes planos, se atraen. Conocida la fuerza que actúa entre los vórtices, puede calcularse la energía de interacción para cualquier configuración. Por ejemplo, la energía por unidad de longitud de un conjunto alineado de vórtices de pancake inclinado un ángulo  $\theta$  respecto al eje  $z$  es [5]:

$$\varepsilon(\theta) = -\left(\frac{\phi_0}{4\pi\lambda}\right)^2 \ln\left(\frac{\lambda}{\xi} \frac{1 + \cos\theta}{2\cos\theta}\right) \cos\theta. \quad (2)$$

El signo menos indica el hecho de que la energía es de atracción. Entre los resultados que se exponen en la referencia [5] se muestra que, con esta configuración de energía, por encima de determinado ángulo, el sistema se vuelve inestable. Por este motivo los autores sugieren una nueva configuración posible para el grupo de vórtices, que presenta una menor energía libre. Dicha configuración se muestra en la Figura 1b. En la figura  $L_0$  es la altura de la configuración y  $\rho = L_0 \tan\theta$ . Esta estructura será llamada "estructura de kink", siguiendo el nombre en inglés que los autores utilizan. Llamaremos también "energía de kink" o "energía de tilt", según el caso, a los valores de las respectivas energías. Los cálculos arrojaron que la energía necesaria para deformar una línea recta de vórtices de tipo pancake en una estructura de kink es la siguiente:

$$E_{\text{kink}} = \left(\frac{\phi_0}{4\pi s}\right)^2 \lambda \left[ \left( e^{\frac{-\rho}{\lambda}} - 1 \right) + \ln\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) - E_i\left(\frac{-\rho}{\lambda}\right) + C \right], \quad (3)$$



**Figura 1.** Estructuras de vórtices de pancake.

- Una línea de vórtices tipo pancake inclinada un ángulo  $\theta$ . (Estructura de "tilt")
- La estructura de "kink" con  $L_0$  como altura de la configuración y  $\rho = L_0 \tan\theta$ .

donde  $E_i$  es la función exponencial-integral y  $C$  es la constante de Euler,  $C = 0.577\dots$

Por otro lado, de la ecuación (2) se obtiene que la energía requerida para inclinar una línea recta de vórtices de tipo pancake de altura  $L_0$  hasta formar una "estructura de tilt" es la siguiente:

$$E_{\text{tilt}} = \left(\frac{\phi_0}{4\pi s}\right)^2 L_0 \ln\left(\frac{1 + \cos\theta}{2\cos\theta}\right). \quad (4)$$

De las dos ecuaciones anteriores se deduce que, para ángulos no demasiado pequeños y un número suficientemente grande de vórtices tipo pancake, se requiere menos energía para formar la estructura de kink que la que se requiere para formar la estructura de tilt con el mismo ángulo  $\theta$  [5].

## III. ESTRUCTURAS DE TILT Y DE KINK CON IMANES

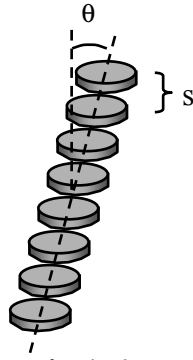
Con el propósito de simular lo más posible las condiciones descritas anteriormente para el caso de los vórtices, se confinaron los imanes a moverse por "celdas" o "pistas" espaciadas a una distancia  $s$ . Consideraremos que los imanes están lo suficientemente distantes como para que puedan considerarse como dipolos magnéticos de momento  $m$ . La estructura analizada para los imanes se muestra en la Figura 2. Se conoce que el campo magnético producido por un dipolo está dado por:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right),$$

de donde la energía de interacción entre dos dipolos vecinos, que se calcula mediante la fórmula  $E = -\vec{m} \cdot \vec{B}$  es:

$$E_0 = -\frac{\mu_0 m^2}{4\pi s^3} (3\cos^2\theta - 1)\cos^3\theta. \quad (5)$$

**Figura 2.** Arreglo de imanes alineados e inclinados determinado ángulo  $\theta$ .



Entonces, se tiene que la energía de interacción por unidad de longitud para un arreglo de  $N$  imanes está dada por:

$$E_N(\theta) = - \frac{\mu_0 m^2}{4\pi s^4} \frac{(3 \cos^2 \theta - 1) \cos^4 \theta}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{N-i}{i^3}. \quad (6)$$

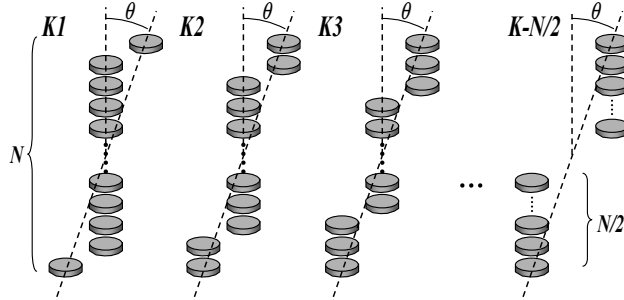
Esta fórmula fue obtenida utilizando el hecho de que hay  $N - i$ ,  $i$ -ésimos vecinos cuya distancia respectiva entre ellos es  $z_i = i \cdot s$ . Como se observa, esta energía es de atracción para ángulos no muy grandes y tiende a cero a medida que el ángulo se aproxima a 90 grados, lo que equivale a que los imanes se encuentren infinitamente alejados. Por otra parte, con el propósito de determinar si la estructura de kink propuesta en [5] es la más favorable energéticamente, se determinó la energía de interacción para diferentes configuraciones de kink que se muestran en la Figura 3. La fórmula general para una estructura que presenta  $n$  imanes separados por cada lado, es:

$$E_{\text{kink}}(\theta, n) = - \frac{\mu_0 m^2}{4\pi s^3} \left[ 4 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n-i}{i^3} + 2 \sum_{i=1}^{N-2n-1} \frac{N-2n-i}{i^3} + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N-2n} \frac{2(n+j-i)^2 - \frac{(N-1)^2}{4} \tan^2 \theta}{\left[ (n+j-i)^2 + \frac{(N-1)^2}{4} \tan^2 \theta \right]^{\frac{5}{2}}} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{2(N-n+j-i)^2 - (N-1)^2 \tan^2 \theta}{\left[ (N-n+j-i)^2 + (N-1)^2 \tan^2 \theta \right]^{\frac{5}{2}}} \right]. \quad (7)$$

En nuestro caso se trabajó con diez imanes, por lo que aparecieron cinco configuraciones posibles, escogidas sobre la base de que no existe razón física alguna para esperar una ruptura espontánea de simetría. Las energías de las configuraciones K2, K3 y K4 se obtienen de la ecuación (7) haciendo  $N = 10$  y  $n = 2, 3$  y  $4$  respectivamente. Para la configuración K1 hay que anular el primer término dentro del paréntesis y para la configuración K5 se anulan los términos segundo y tercero. Por otro lado, utilizando la fórmula (6) se determinó la energía de

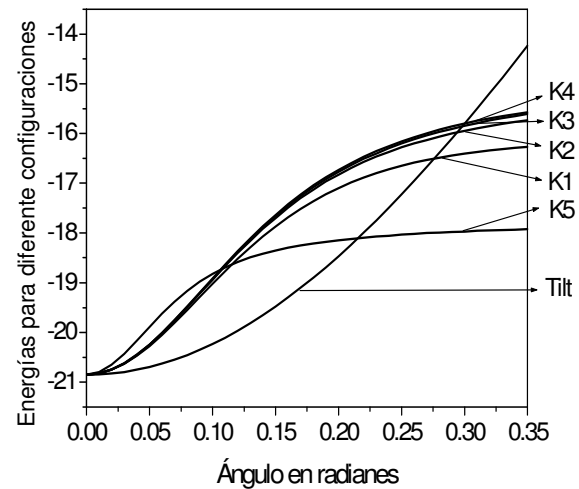
interacción que aparece en la estructura de tilt que se muestra en la Figura 2, donde se obtiene:

$$E_{\text{tilt}}(\theta) = - \frac{\mu_0 m^2}{4\pi s^3} (3 \cos^2 \theta - 1) \cos^3 \theta \sum_{i=1}^{10-1} \frac{10-i}{i^3}. \quad (8)$$



**Figura 3.** Algunas configuraciones consistentes en un número  $N-2n$  de imanes alineados en el centro, con un número  $n$  de imanes separados de dicha estructura central, a cada lado.

La Figura 4 muestra una gráfica que compara las energías de la configuración de tilt (T) con cada una de las configuraciones ( $K_i$ ). De la gráfica se observa que efectivamente de todas las configuraciones  $K_i$  aquella que presenta menor energía es la configuración K5, lo cual está de acuerdo con la proposición hecha en [5]. De la gráfica también puede observarse que para determinados ángulos las configuraciones de kink se vuelven más estables que la de tilt ya que presentan menor energía. Es curioso observar como las configuraciones K1, K2, K3 y K4 presentan una energía bastante similar cuyo valor aumenta a medida que aumenta el número de la configuración, sin embargo la configuración K5 presenta una abrupta caída de energía respecto a las configuraciones anteriores.



**Figura 4.** Gráficas de energía para diferentes configuraciones mostradas en la Figura 3.

#### IV. COMPARACIÓN ENTRE VÓRTICES E IMANES

Antes que nada es necesario hacer notar que las fuerzas de interacción entre los vórtices y entre los imanes, a pesar de ser ambas de origen magnético, presentan notables diferencias, asociadas a la forma en que decaen en el espacio los campos magnéticos asociados a vórtices y a imanes, respectivamente. Sin embargo en nuestro trabajo hemos mostrado como existen concordancias cualitativas entre ambos modelos en determinados aspectos. Como se mostró en la sección II, la energía de tilt por unidad de longitud de una línea de vórtices de pancake es:

$$\varepsilon_v(\theta) = \left( \frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \ln \left( \frac{\lambda}{\xi} \frac{1 + \cos\theta}{2\cos\theta} \right) \cos\theta, \quad (9)$$

mientras que para los imanes:

$$\varepsilon_i(\theta) = \left( \frac{\mu_0 m^2}{4\pi s^2} \right) \frac{(3\cos^2\theta - 1)\cos^4\theta}{9} \sum_{i=1}^9 \frac{10-i}{i^3}. \quad (10)$$

Ambos valores de energía se graficaron como se muestra en la Figura 5. En la gráfica hay que tener en cuenta que ésta se ajustó con determinado factor de escala. Aunque en esencia la forma de las gráficas es diferente, su comportamiento cualitativo es similar. Ambas comienzan con determinado valor de energía cuyo módulo decae a cero cuando el ángulo se aproxima a 90 grados. Es necesario hacer notar que para el caso de los vórtices, la gráfica se mantiene todo el tiempo por debajo del eje de los ángulos, lo cual ratifica el hecho de que los vórtices siempre que se encuentren en diferentes planos van a atraerse. Para el caso de los imanes esto no es así, sino que existe un ángulo para el cual las fuerzas entre imanes se tornan de repulsión. Otro aspecto a señalar es el hecho de que en el caso de los imanes la energía descende asintóticamente a cero, mientras que para los vórtices esto no es así.

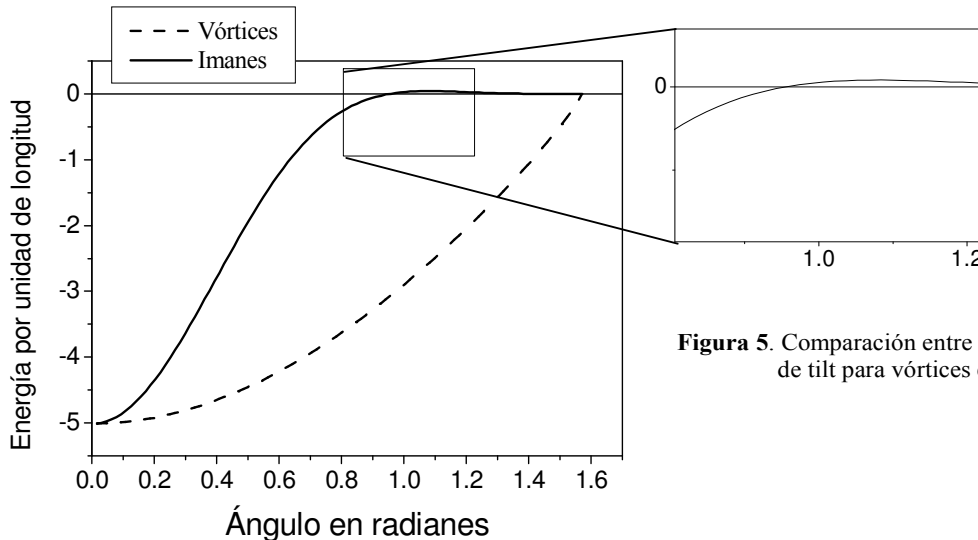


Figura 5. Comparación entre las energías de tilt para vórtices e imanes.

Por último, queremos mostrar una comparación en cuanto a un hecho que ya se señaló anteriormente: para determinado ángulo, la estructura de kink K5 se vuelve más estable que la de tilt. Debido a esto se decidió graficar la diferencia entre la energía de tilt y la energía de kink para ambos casos en la Figura 6. Como se muestra en la gráfica, existe determinado ángulo a partir del cual la energía de kink se hace menor que la de tilt, lo que dice que es energéticamente más favorable esta configuración. Se puede apreciar que la forma de las gráficas es bastante parecida: ambas parten de cero y crecen a medida que aumenta el ángulo para valores no demasiado grandes de éste.

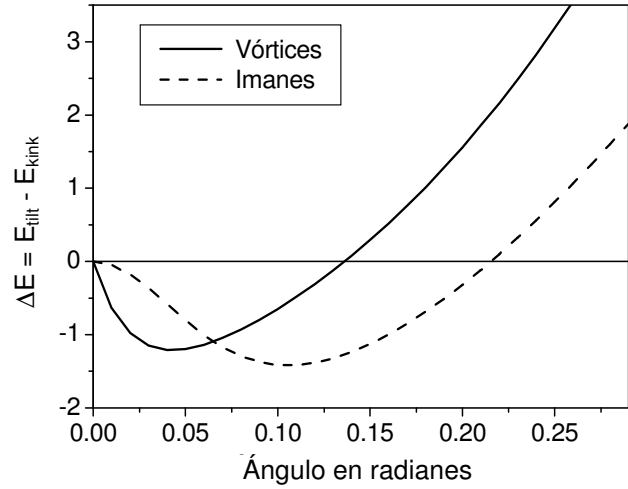


Figura 6. Comparación entre energías de kink y de tilt para vórtices y para imanes.

#### V. UN EXPERIMENTO PRELIMINAR

Luego de analizado todo lo expuesto anteriormente, decidimos comprobar en la práctica algunos resultados. Para ello hicimos un experimento sencillo con solamente seis imanes, utilizando un montaje

consistente en seis “celdas” o “rampas” de vidrio equidistantes, dentro de las cuales cada imán podía deslizarse con poca fricción. Para minimizar la fricción (recuérdese que todos los cálculos teóricos en la referencia [5] y realizados por nosotros tienen lugar en un ambiente idealizado de cero “pinning”, equivalente a cero fricción) se aplicaron vibraciones moderadas a las celdas. El experimento consistió en colocar inicialmente los seis imanes formando una línea recta perpendicular a las celdas, e ir aplicando una fuerza sobre los imanes de los extremos de tal suerte que la línea fuera inclinándose, tal y como se espera de la estructura de “tilt”. A partir de cierto ángulo, se debía esperar una transición hacia una estructura de “kink”. La teoría predice que la estructura más estable que debe tomar la configuración luego de cierto ángulo sería en este caso la K3, correspondiente a la ruptura en dos partes iguales para el caso de seis imanes. Nuestros resultados arrojaron que en el 87% de un total de 30 repeticiones del experimento esta fue la estructura alcanzada. Además, los cálculos muestran que el ángulo para el cual debe romperse la estructura de tilt y formarse la de kink para seis imanes es  $\theta_{teo} = 16.4^\circ$ , el obtenido por nosotros experimentalmente fue de  $\theta^{exp} = 18.7^\circ \pm 2.2^\circ$ , (para el cálculo de errores se tuvo en cuenta la desviación cuadrática media de los valores de longitud medidos, además de los errores instrumentales correspondientes), lo cual muestra una magnífica concordancia con los resultados teóricos obtenidos.

## VI. CONCLUSIONES

Hemos propuesto un modelo macroscópico basado en arreglos de imanes permanentes que puede contribuir a comprender la física involucrada en los vórtices tipo “pancake” cuando se desprecian las interacciones entre pancakes mediadas por efecto Josephson, así como el “pinning” producido por los defectos del material superconductor. El comportamiento de la energía calculada para nuestros arreglos de imanes se parece cualitativamente al correspondiente a vórtices de pancake. En especial, nuestro modelo reproduce la transición de la configuración de “tilt” hacia la configuración de “kink” en la medida que se aplica una fuerza de cizalladura sobre los vórtices (ó los imanes). Experimentos preliminares con imanes también permiten visualizar esta transición, cuya semejanza semi-cuantitativa con los cálculos es notable. Estos resultados indican que nuestro modelo macroscópico puede ser de gran ayuda para obtener una representación intuitiva de la muy compleja física de los vórtices tipo pancake.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a J. R. Clem por sus consejos y por proveer parte de la literatura necesaria, así como a R. Mulet por discusiones científicas. También al laboratorio de Ingeniería de Zeolitas por prestarnos un vibrador para los experimentos.

## REFERENCIAS

- [1] ALTSHULER, E. and R. GARCÍA (2003): **Am. J. Phys.** 71, 405.
- [2] ALTSHULER, E. (2000): In **Some contemporary problems of condensed matter physics** (Nova Science Publishers, 2000), 65-127.
- [3] ALTSHULER, E. and T.H. JOHANSEN (2004): **Rev. Mod. Phys.** 76, 471.
- [4] BLATTER, G. *et al.* (1994): **Rev. Mod. Phys.** 66, 1125.
- [5] BENKRAOUDA and J.R. CLEM (1996): **Phys. Rev. B** 53, 1.
- [6] CLEM, J. R. (1991): **Phys. Rev. B** 43, 10.